E.N.S.I. PHYSIQUE-MECANIQUE Options M & P 1981

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures

N. B. — *Le problème qui suit développe une méthode de calcul des valeurs propres de matrices sur l'exemple des matrices carrées d'ordre 2. Les différentes parties ne sont pas indépendantes.*

I

Soit A une matrice carrée d'ordre 2, à éléments réels, dont le déterminant est non nul :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1° A quelle condition sur A, nécessaire et suffisante, peut-on écrire : A = LR

où :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix} \quad ?$$

Montrer que, si elles existent, les matrices L et R sont uniques et exprimer l, r, s et t en fonction de a, b, c et d.

On dira, dans toute la suite du problème, qu'une matrice admet une décomposition LR si son déterminant est non nul et si elle satisfait la condition obtenue ci-dessus.

2° On suppose que A admet une décomposition LR avec :

$$A = LR$$

Posons :

$$A_1 = RL = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

Montrer que :

i. A_1 est semblable à A;

ii. det A = det A_1 (det A désigne le déterminant de A);

iii. A_1 et A ont les mêmes valeurs propres;

iv. $a_1 = a + d - \dfrac{\det A}{a}$,

$b_1 = b$,

$c_1 = \dfrac{\det A . c}{a^2}$,

$d_1 = \dfrac{\det A}{a}$;

v. $a + d = a_1 + d_1$.

.../...

II

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de matrices définies comme suit :

— $A_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$

est une matrice donnée de déterminant non nul;

— si A_n admet une décomposition LR avec $A_n = L_n R_n$, alors $A_{n+1} = R_n L_n$;

— si A_n n'admet pas de décomposition LR, alors $A_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On pose :

$$\Delta = \det A_0 \ (\neq 0)$$

$$T = a_0 + d_0$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

3° Montrer que A_{n+1} est la matrice nulle si et seulement si $a_n = 0$.

4° Montrer que, si A_{n+1} n'est pas la matrice nulle, on a :

$$a_{n+1} = T - \frac{\Delta}{a_n}$$

$$b_{n+1} = b_n$$

$$c_{n+1} = \frac{\Delta c_n}{a_n^2}$$

$$d_{n+1} = \frac{\Delta}{a_n}.$$

5° En déduire que, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n n'est pas nulle et si la suite numérique $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, on a les propriétés suivantes :

i. Les suites $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes;

ii. $\lim_{n \to \infty} a_n$ et $\lim_{n \to \infty} d_n$ sont valeurs propres de A_0 et $\lim_{n \to \infty} b_n = b_0$.

6° Dans cette question, on suppose $T = 0$, $a_0 \neq 0$ et $\Delta \neq 0$.

i. Montrer qu'alors aucune des matrices A_n n'est nulle;

ii. Calculer explicitement les matrices $A_n (n \in \mathbb{N})$;

iii. A quelle condition les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles toutes convergentes?

Dans toute la suite du problème, on suppose :

$$\begin{cases} \delta = T^2 - 4\Delta > 0 \\ T > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

On désigne par m et M les solutions de $x^2 - Tx + \Delta = 0$, avec $m < M$.

.../...

7° Tracer dans un même repère orthonormé les graphes des fonctions f et g définies par :

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{T} - \dfrac{\Delta}{x} \\ g(x) = x \end{cases}$$

Démontrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent (et préciser les limites) dans les cas suivants :

$$a_0 > \mathrm{M}$$
$$a_0 \in [m, \mathrm{M}]$$

8° Soit $\mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Détailler une procédure adroite de calcul des matrices A_n adaptée au moyen de calcul dont vous disposez (précisez quel est ce matériel) et calculer A_1, A_2, ..., A_7.

Avec quelle incertitude approche-t-on ainsi les valeurs propres de A_0?

9° i. Compléter l'étude de la question 7 dans les cas suivants :

$$a_0 < 0$$
$$a_0 \in \left]\, 0, \frac{\Delta}{\mathrm{T}}\right[$$

ii. Montrer qu'il existe un ensemble $\mathrm{S} = \{s_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ tel que :

. $\mathrm{S} \subset [0, m[$

. $s_0 = 0, \quad s_1 = \dfrac{\Delta}{\mathrm{T}}$

. si a_0 appartient à S, alors, à partir d'un certain rang p (à préciser), A_n est nulle.

iii. Compléter l'étude de la question 7 dans le cas où $a_0 \in [0, m] \setminus \mathrm{S}$.

10° Résumer les résultats des questions 7 et 9 dans un tableau.

XXXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail